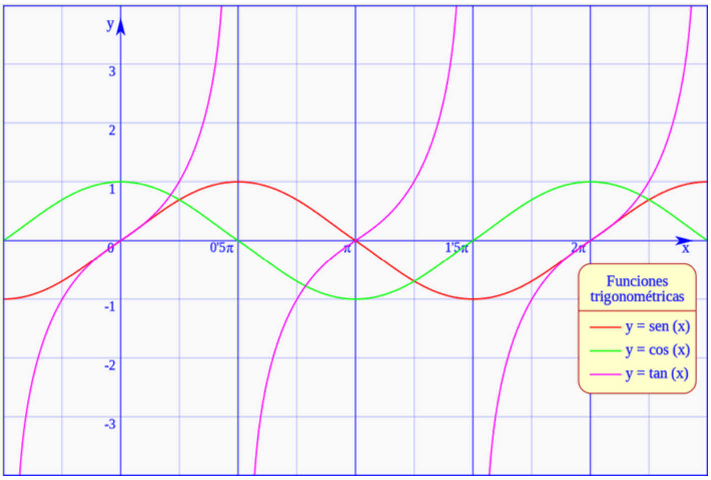
Matemáticas (repaso)

Camilo Vargas Walteros

1. Las funciones

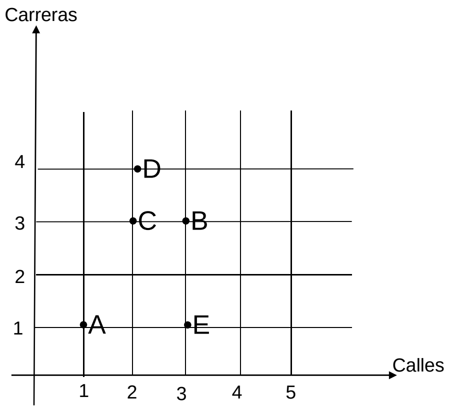


FUENTE:

- *http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa*

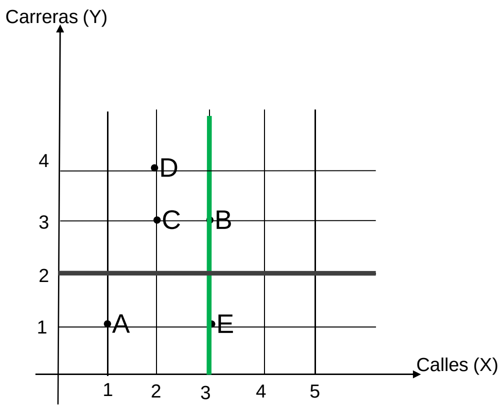
Repaso matemático

- Nos encontramos en una ciudad en la cual las ubicaciones se dan en calles y carreras.
- ¿Cuál sería la dirección de los puntos "A", "B", "C", "D" y "E"?
- ¿Cómo serían las direcciones si las **"simplificamos"** de la siguiente forma:
- Calles = X
- Carreras = Y



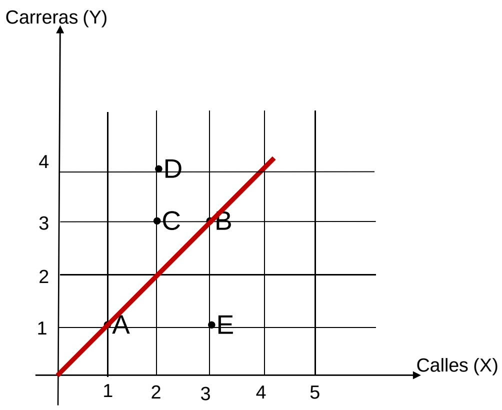
Repaso matemático

- ¿Cuál es la ruta del "transporte verde"?
- ¿Cuál es su nombre **"simplificado"**?
- ¿Cuál es la ruta del "transporte gris"?
- ¿Cuál es su nombre **"simplificado"**?



Repaso matemático

- ¿Por cuales puntos pasa el “transporte rojo”?
- ¿En que se diferencia de las rutas anteriores?
- ¿Por cada calle cuantas carreras recorre?

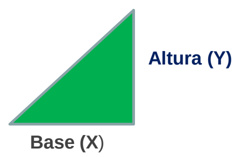


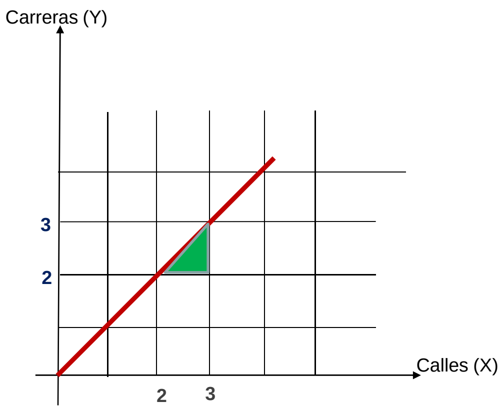
2. La pendiente

- *FUENTE: http://es.wikipedia.org/wiki/Pendiente_(geograf%C3%ADa)*

Repaso matemático

- ¿Por cada calle cuantas carreras recorre?
- Esto se puede responder a partir del triángulo:





Repaso matemático

- En el caso de la “ruta roja” podemos expresar su recorrido dependiendo de su inclinación, la cual depende de la base y la altura de los triángulos.
- Utilicemos el “triángulo verde”:

Altura triángulo = Carrera más arriba – Carrera más baja

Altura triángulo = 3 – 2 = 1

Base triángulo = Calle más a la derecha – Calle más a la izquierda

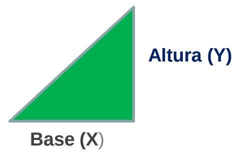
Base triángulo = 3- 2 = 1

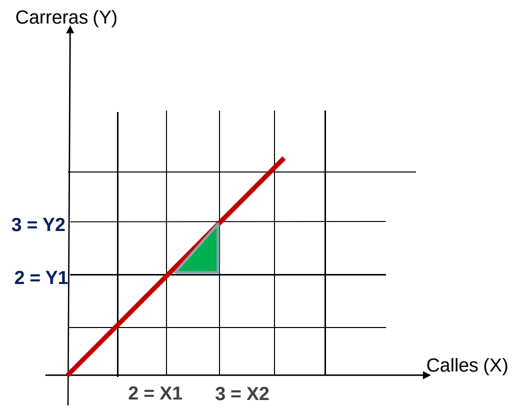
- Inclinación = Altura triángulo / Base triángulo

Inclinación = 1 / 1 = 1

Repaso matemático

- ¿Por cada calle cuantas carreras recorre?
- Esto se puede responder a partir del triángulo:





Repaso matemático

- Inclinación = Altura triángulo / Base triángulo

Altura triángulo = Carrera más arriba – Carrera más baja

Altura triángulo = Y2 – Y1

Base triángulo = Calle más a la derecha – Calle más a la izquierda

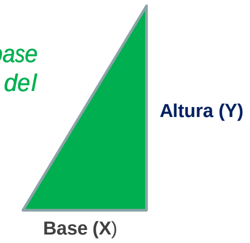
Base triángulo = X2 – X1

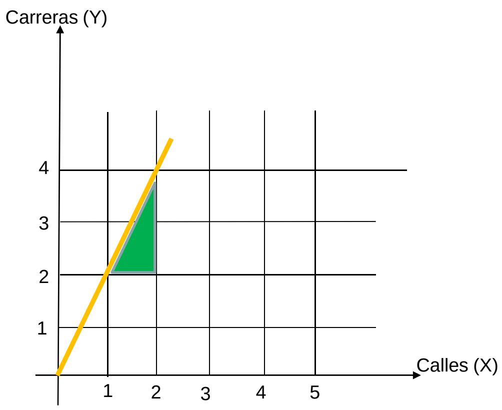
$$\text{Inclinación} = \text{Pendiente} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\text{Altura}}{\text{Base}}$$

Repaso matemático

- En realidad las rutas se llaman funciones.
- ¿Cuanto es la pendiente de la "función amarilla"?

- *¿Cambio la base o la altura del triangulo?*





Repaso matemático

- *Escribe matemáticamente la función amarilla (ecuación).*

- Una función lineal se puede caracterizar por su intercepto y pendiente:

$$Y = \text{intercepto} + \text{pendiente}(X)$$

- La variable **"Y"** también se conoce con el nombre de **"variable dependiente"** porque su comportamiento depende del movimiento de la variable "X" (**"variable independiente"**).
- El **"intercepto"** es un número que nos muestra la altura que tiene la función cuando pasa por el punto X = 0.
- La **"pendiente"** es un número que nos muestra la inclinación de la función.

Repaso matemático

- Otros ejemplos de funciones (más prácticos):

$$\boxed{C = \frac{9F}{5} + 32}$$

$$\boxed{V = \frac{k}{P}}$$

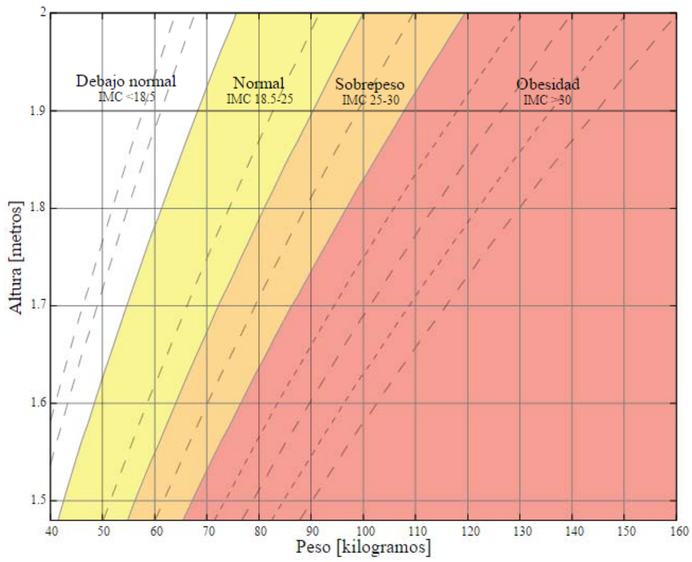
$$\boxed{F = P(1+r)^n}$$

$$\boxed{V = H_0 D}$$

$$\boxed{R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

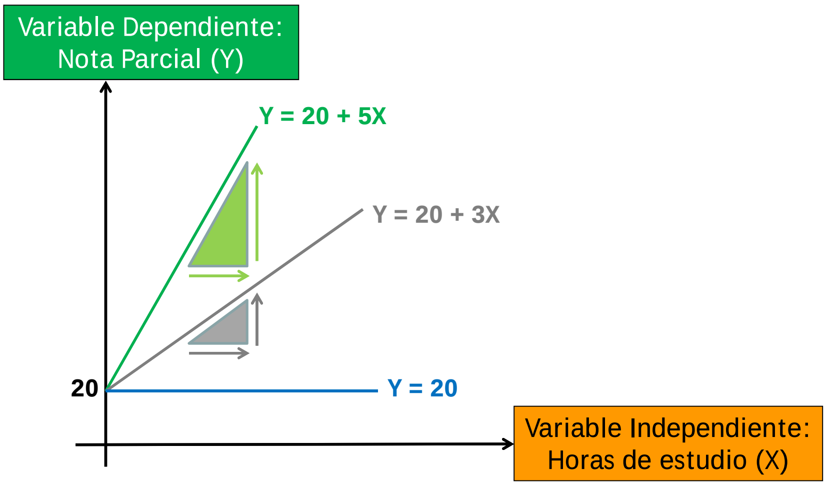
$$\boxed{IMC = \frac{m}{h^2}}$$

Repaso matemático



- *FUENTE: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/Body_mass_index_chart-es.svg*

Repaso matemático



¿Cuánto es la pendiente para cada "línea"?
¿Cuánto es el intercepto para cada "línea"?

Repaso matemático

- Una función lineal se puede caracterizar por su intercepto y pendiente:

$$Y = \text{intercepto} + \text{pendiente}(X)$$

- Por ejemplo:

$$Y = 4 + 3X$$

- Una función también se puede expresar aislando la variable "X" siempre y cuando tengamos en cuenta dos reglas:

1. El más lejano.
2. El espejo.

- *Despeja la variable "X" de la función anterior*
    - *¿Cómo se lee esta nueva pendiente?*

Repaso matemático

$$\boxed{Y = 4 + 3X}$$

- La pendiente de esta función se lee "ante un incremento en una unidad en "X", "Y" aumenta en tres unidades.

$$Y = 4 + 3X$$

$$Y - 4 = 3X$$

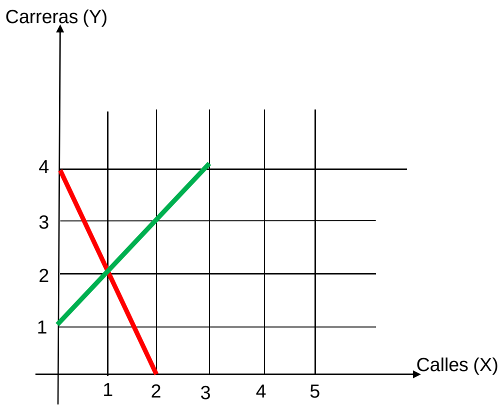
$$\frac{Y-4}{3} = X$$

$$\boxed{X = \frac{-4}{3} + \frac{Y}{3}}$$

- La pendiente de esta función se lee ante un incremento en una unidad en "Y", "X" aumenta en un tercio de unidades.

Repaso matemático

- En otras situaciones podemos tener dos funciones.
- ¿Cuál es la ecuación de la "función roja"?
- ¿Cuál es la ecuación de la "función verde"?
- ¿En cual punto se cruzan estas funciones?



Repaso matemático

- Consideremos dos puntos de la "línea roja" como (2,0) y (1,2).
- Esto es equivalente a (x1,y1) y (x2,y2).

$$\text{Pendiente} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{2-0}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

- Consideremos dos puntos de la "línea verde" como (2,3) y (3,4).
- Esto es equivalente a (x1,y1) y (x2,y2).

$$\text{Pendiente} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{4-3}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

Repaso matemático

- La ecuación de la "función roja" es:

$$Y = 4 - 2X$$

- La ecuación de la "función verde" es:

$$Y = 1 + X$$

- Matemáticamente podemos encontrar el punto en el cual se cruzan estas funciones utilizando alguna de las siguientes reglas:

1. Resta o eliminación.
2. Reemplazar o sustitución.
3. Igualación.

Encuentra el valor de "X" y el valor de "Y" para este sistema de ecuaciones.

Repaso matemático

- La ecuación de la "función roja" y la "función verde"

$$Y = 4 - 2X \qquad\qquad Y = 1 + X$$

- Este sistema se puede resolver aplicando:

1. Igualar

$$4 - 2X = 1 + X$$
$$4 - 1 = 2X + X$$
$$3 = 3X$$
$$X = \frac{3}{3} = 1$$

2. Sustituir

$$Y = 4 - 2X$$
$$Y = 4 - 2(1)$$
$$Y = 2$$

3. Sustituir (*)

$$Y = 1 + X$$
$$Y = 1 + (1)$$
$$Y = 2$$

(*) Para verificar el resultado.

Repaso matemático

- Resuelve y simplifica las siguientes expresiones:

$$\boxed{\frac{X^9Y^8}{Y^7X^6}} \quad \boxed{\left(-2t^{-1}\right)\left(-3t^{-2}\right)\left(-4t^{-3}\right)} \quad \boxed{\left(\frac{4^{-2}a^{-3}}{b^{-1}}\right)^2} \quad \boxed{\left(\frac{k^{-1,5}}{\sqrt{k}}\right)^{-2}}$$

- Encuentra el valor de (sin usar calculadora):

$$\boxed{\left(3^{-1}\right)\left(9^2\right)\left(27^{-1}\right)} \quad \boxed{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}}$$

- Despeja "N" y "c" de las ecuaciones:

$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 A}{\ell}} \quad \boxed{Q = \sqrt{\left(\frac{c+d}{c-d}\right)}}$$

- *FUENTE: Math Centre (2003). An algebra refresher*

Repaso matemático

- Resuelve y simplifica la siguiente expresión:

$$\left(\frac{4^{-2}a^{-3}}{b^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{b}{4^2a^3}\right)^2 = \frac{b^2}{4^{2(2)}a^{3(2)}} = \frac{b^2}{4^4a^6}$$

$$\left(\frac{1}{b^{-c}}\right) = b^c$$

$$\left(b^c\right)^a = b^{ca}$$

- Encuentra el valor de (sin usar calculadora):

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = (-1)^2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = (1)\left(\frac{3^2}{2^2}\right) = \frac{9}{4}$$

- Despeja "N" de la ecuación:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{\ell} \rightarrow L\ell = \mu N^2 A \rightarrow N^2 = \frac{L\ell}{\mu A} \rightarrow N = \left(\frac{L\ell}{\mu A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Repaso matemático

- Propiedades de los exponentes:

$$\boxed{b^r b^s = b^{r+s}}$$

$$\boxed{\frac{b^s}{b^r} = b^{s-r}}$$

$$\boxed{\left(b^r\right)^s = b^{rs}}$$

$$\boxed{b^{-s} = \frac{1}{b^s}}$$

$$\boxed{(bc)^s = b^s c^s}$$

$$\boxed{b^{1/s} = \sqrt[s]{b}}$$

$$\boxed{\left(\frac{b}{c}\right)^s = \frac{b^s}{c^s}}$$

$$\boxed{b^{r/s} = \sqrt[s]{b^r}}$$

Repaso matemático

- Encuentra el valor de "X" y el valor de "Y" para los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &= 12 \\ 3X + 2Y &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{X}{2} + 3Y &= 1 \\ X + 2Y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2X - Y}{5}\right) &= X - 1 \\ 3X - \left(\frac{2X - Y}{5}\right) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &= 3 \\ 5X - 6Y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} &= 5 \\ \frac{3}{X} + \frac{2}{Y} &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4X + 3(Y - 1) &= 5 \\ 3(Y - 1) &= 2X - 7 \end{aligned}$$

- *FUENTE: Gómez (2014-I). Taller 1 (Macroeconomía 1)*

Repaso matemático

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &= 12 \\ 3X + 2Y &= 13 \end{aligned}$$

1. Multiplicar por una constante

$$\begin{aligned} 3(2X + 3Y) &= 3(12) \\ 2(3X + 2Y) &= 2(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6X + 9Y &= 36 \\ 6X + 4Y &= 26 \end{aligned}$$

2. Restar ecuaciones

$$6X + 9Y - (6X + 4Y) = 36 - (26)$$

$$6X + 9Y - 6X - 4Y = 36 - 26$$

$$5Y = 10$$

$$Y = 2$$

3. Sustituir

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &= 12 \\ 2X + 3(2) &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X + 6 &= 12 \\ 2X &= 12 - 6 \end{aligned}$$

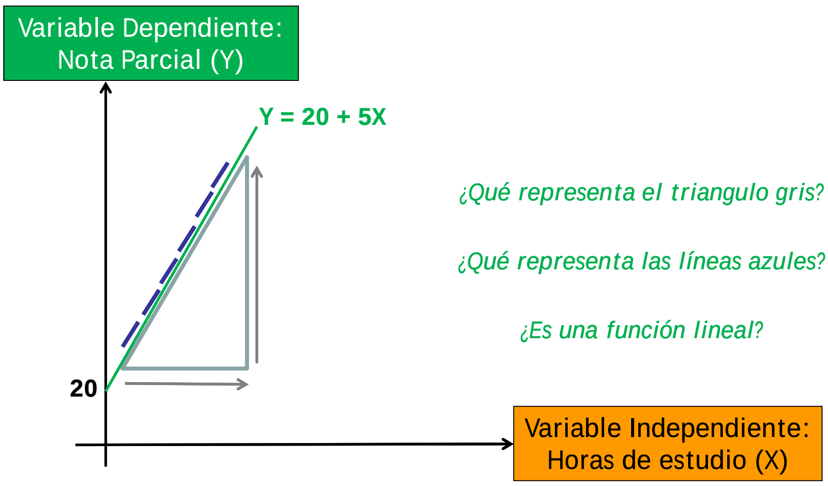
$$\begin{aligned} 2X &= 6 \\ X &= 3 \end{aligned}$$

3. La derivada

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

- *FUENTE: http://educacioncalculomatematico.blogspot.com/2010/11/derivadas-de-funciones.html*

Repaso matemático



¿Qué representa el triangulo gris?

¿Qué representa las líneas azules?

¿Es una función lineal?

Repaso matemático

- Una **"pendiente"** mide la inclinación de una función en un segmento especifico (es el "triángulo gris" de la grafica anterior):

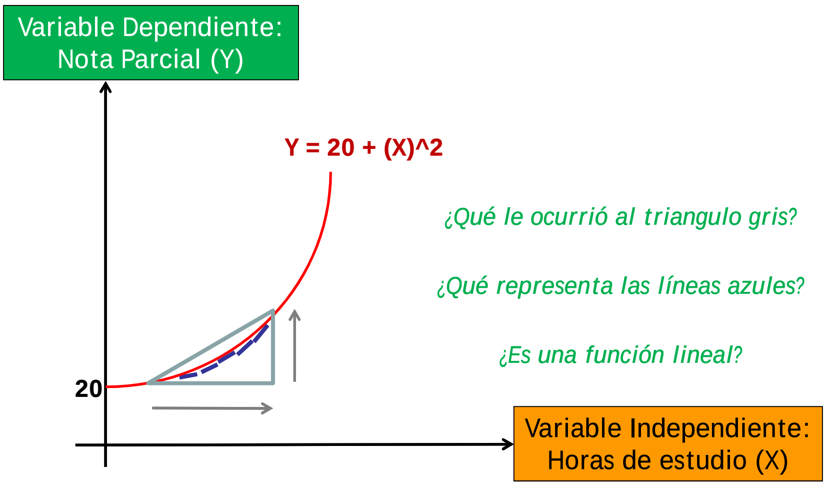
$$\text{Pendiente} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

- Una **"derivada"** mide la inclinación de una función en un punto (son las "líneas azules" de la grafica anterior):

$$\text{Derivada} = F'(X) = \frac{dY}{dX} = Y'$$

  - *Una derivada es una pendiente muy pequeña.*

Repaso matemático



¿Qué le ocurrió al triangulo gris?

¿Qué representa las líneas azules?

¿Es una función lineal?

Repaso matemático

- En el caso de la "función verde":

$$Y = 20 + 5X$$

- Su pendiente y derivada son la misma:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{dY}{dX} = 5$$

- Porque en todos los puntos de la función su inclinación es "**igual**".

Por ejemplo:

- Si "X = 2" entonces "Y = 30"
- Si "X = 3" entonces "Y = 35" (aumento en 5).
- Si "X = 4" entonces "Y = 40" (aumento en 5).

Repaso matemático

- En el caso de la "función roja":

$$Y = 20 + X^2$$

- Su pendiente y derivada son diferentes:

$$\frac{dY}{dX} = 2X$$

- Porque en todos los puntos de la función su inclinación es **"diferente"**.

Por ejemplo:

- Si "X = 2" entonces "Y = 24"
- Si "X = 3" entonces "Y = 29" (aumento en 5).
- Si "X = 4" entonces "Y = 36" (aumento en 7).

Repaso matemático

- Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

$$\boxed{Y = 4}$$

$$\boxed{Y = 4 + 2X}$$

$$\boxed{Y = \frac{X^{50}}{50}}$$

$$\boxed{Y = -5X^{-1/2}}$$

$$\boxed{Y = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 4}$$

$$\boxed{Y = BX^{\partial}}$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{\sqrt{X}}}$$

$$\boxed{Y = Ln\left(X^2 + 1\right)}$$

$$\boxed{Y = X\left[f(X)\right]}$$

$$\boxed{Y = \frac{(X+1)}{(X-1)}}$$

Repaso matemático

- Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

$$Y = 4 + 2X$$

$$\frac{dY}{dX} = 0 + 2 = 2$$

$$Y = -5X^{-1/2}$$

$$\frac{dY}{dX} = -5\left(\frac{-1}{2}\right)X^{-1/2-1}$$

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{5}{2}\right)X^{-3/2}$$

$$Y = Ln\left(X^2 + 1\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{1}{1+X^2}\right)(2X)$$

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{2X}{1+X^2}\right)$$

$$Y = a \qquad \frac{dY}{dX} = 0$$

$$Y = aX \qquad \frac{dY}{dX} = a$$

$$Y = aX^b \qquad \frac{dY}{dX} = abX^{b-1}$$

$$Y = Ln\left[g(X)\right] \qquad \frac{dY}{dX} = \left[\frac{1}{g(X)}\right]g'(X)$$

Mira el siguiente video:

- *www.youtube.com/watch?v=ObHJJYvu3RE*

Repaso matemático

- Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

$$Y = X\left[f(X)\right]$$

$$\frac{dY}{dX} = (1)\,f(X) + Xf'(X)$$

$$\frac{dY}{dX} = f(X) + Xf'(X)$$

$$Y = \frac{(X+1)}{(X-1)}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(1)(X-1)-(X+1)(1)}{(X-1)^2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-1-X-1}{(X-1)^2} = \frac{-2}{(X-1)^2}$$

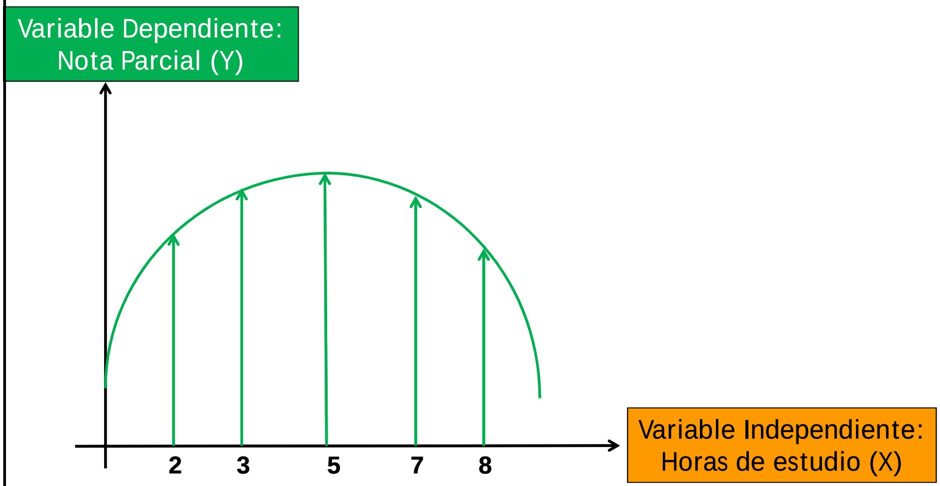
$$Y = f(X)g(X)$$

$$\frac{dY}{dX} = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$$

$$Y = \frac{f(X)}{g(X)}$$

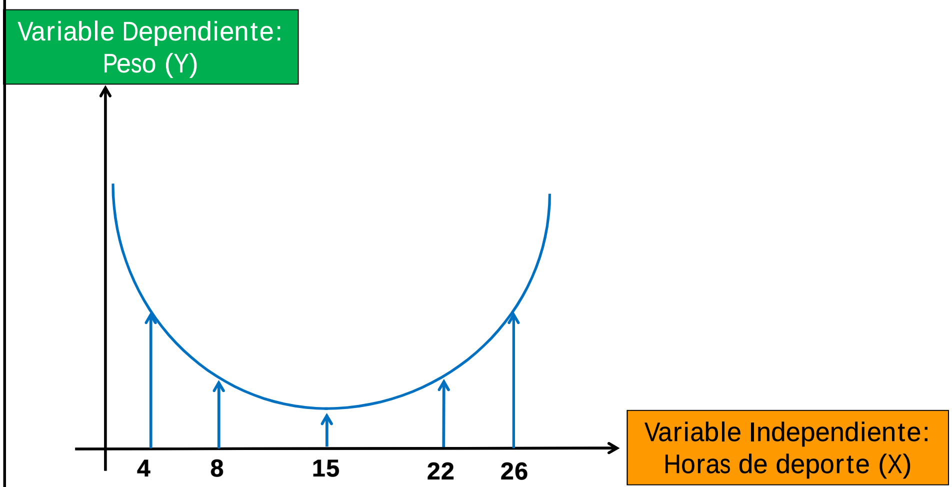
$$\frac{dY}{dX} = \frac{f'(X)g(X) - f(X)g'(X)}{\left[g(X)\right]^2}$$

Repaso matemático



¿Antes de 5 horas de estudio la pendiente es positiva o negativa?
¿Después de 5 horas de estudio la pendiente es positiva o negativa?
¿Cuántas horas permiten obtener la nota "máxima" en el parcial?

Repaso matemático



¿Antes de 15 horas de deporte la pendiente es positiva o negativa?
¿Después de 15 horas de deporte la pendiente es positiva o negativa?
¿Cuántas horas permiten obtener el peso "mínimo"?

Repaso matemático

$\boxed{Y = XZ}$	$\boxed{Y = XZ^{3/2}}$	$\boxed{Y = X^4 Z^{3/2}}$
$\frac{\partial Y}{\partial X} = Z$	$\frac{\partial Y}{\partial X} = Z^{3/2}$	$\frac{\partial Y}{\partial X} = 4X^3 Z^{3/2}$
$Y = Xa$ $\frac{\partial Y}{\partial X} = a = Z$	$Y = Xa$ $\frac{\partial Y}{\partial X} = a = Z^{3/2}$	$Y = X^4 b$ $\frac{\partial Y}{\partial X} = 4X^3 b = 4X^3 Z^{3/2}$
$\frac{\partial Y}{\partial Z} = X$	$\frac{\partial Y}{\partial Z} = X\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2}$	$\frac{\partial Y}{\partial Z} = X^4\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2}$
$Y = bZ$ $\frac{\partial Y}{\partial Z} = b = X$	$Y = bZ^{3/2}$ $\frac{\partial Y}{\partial Z} = b\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2} = X\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2}$	$Y = bZ^{3/2}$ $\frac{\partial Y}{\partial Z} = b\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2} = X^4\left(\frac{3}{2}\right)Z^{1/2}$

Repaso matemático

- Consideremos el siguiente ejemplo, la felicidad material de una persona depende del consumo de chocolatinas y galletas, asumiendo la siguiente función explicita:

$$F = 4C + (2C + 8G)^{1/2} + \sqrt{CG}$$

- *Encuentra la derivada parcial de esta función con respecto a las chocolatinas.*

$$\frac{\partial F}{\partial C}$$

- *Encuentra la derivada parcial de esta función con respecto a las galletas.*

$$\frac{\partial F}{\partial G}$$